Nicht f. d. Austausch

ÜBER DIE NULLSTELLEN DER RIEMANNSCHEN ZETAFUNKTION IM KRITISCHEN STREIFEN

INAUGURALDISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
GENEHMIGT VON DER
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

VON

HEINZ WESTPHAL
AUS BERLIN

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 24. FEBRUAR 1937
TAG DER PROMOTION: 7. JANUAR 1938

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

N 86

REFERENTEN:
DOZENT DR. W. WEBER
PROFESSOR DR. E. SCHMIDT

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin“ / Band 4

Einleitung.

Diese Arbeit stellt sich die Aufgabe, für die RIEMANNsche Zetafunktion eine numerisch genaue Ausmittelung nullstellenfreier Gebiete im kritischen Streifen durchzuführen.

Von solchen Abschätzungen hängt zum Beispiel die Größe des Restgliedes beim Primzahlsatz wesentlich ab. Es wird hier, wie auch sonst immer, die Methode der Cosinusungleichungen verwendet. Zunächst führen wir eine alte LANDAUsche Rechnung[1]) numerisch durch und erhalten so, daß für $t \geqq 200$ im Streifen

$$1 - \frac{1}{17{,}537 \log t} \leqq \sigma \leqq 1$$

keine Nullstelle von $\zeta(s)$ liegt.

Will man aber Ergebnisse erhalten, die über das eben angegebene größenordnungsmäßig hinausgehen, so muß bekanntlich die Größenordnung von $\zeta(s)$ im kritischen Streifen sorgfältig abgeschätzt werden. Für unsere Zwecke genügt es hier zu zeigen, daß für $t \geqq 100$, $\sigma \geqq \frac{1}{4}$

$$|\zeta(s)| < 22{,}41\, t^{\frac{\log 2 \frac{1-\sigma}{1}}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} \log t \tag{1}$$

ist. Zur Herleitung dieses Resultats wird der VAN DER CORPUTsche[2]) Satz über die k-te Ableitung benutzt. Man führt dessen Beweis bekanntlich zunächst für $k = 2$ und geht dann durch Induktion zu allgemeinem k über. Der hier gegebene Beweis für den Fall $k = 2$ geht auf eine Idee von VAN DER CORPUT zurück.[3]) Für allgemeines k hat bereits TITCHMARSH[4]) eine Vereinfachung des VAN DER CORPUTschen Beweises angegeben. Sein Ergebnis enthält nur zwei Glieder in der Behauptung statt dreier Glieder bei VAN DER CORPUT; es ist aller-

1) E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Leipzig und Berlin (1909), Bd. 1, S. 317—324.

2) Van der Corput, *Neue zahlentheoretische Abschätzungen II*. Math. Zeitschr. 29 (1929), S. 397—426.

3) Ich verdanke den Hinweis darauf einer kurzen Bemerkung bei J. F. Koksma, *Diophantische Approximationen*. Berlin 1936, S. 115 oben.

4) E. C. Titchmarsh, *On van der Corput's method and the zetafunction of Riemann I*. Quart. Journ. of Math. (Oxford series) 2 (1931), S. 161—173.

dings dafür auch weniger scharf. Ich habe hier die Rechnung noch weiter abgekürzt, so daß das Ergebnis in der Behauptung nur noch ein einziges Glied enthält, muß dafür aber zwei einschränkende Voraussetzungen machen, die jedoch bei der Anwendung auf die Zetafunktion so weit erfüllt sind, daß wir alles für den Primzahlsatz Wesentliche erhalten.

Das Bindeglied zwischen den Zetaabschätzungen und der Cosinusungleichung ist der Hilfssatz 12. Die ihm zugrunde liegende Formel (52), für die hier ein möglichst einfacher Beweis gegeben wird, ist nicht neu; sie hängt eng mit der aus der Theorie der meromorphen Funktionen bekannten POISSON-JENSENschen Formel zusammen.

Diese Rechnungen liefern eine numerische Präzisierung des folgenden LITTLEWOODschen[5]) Satzes: Es ist $\zeta(s) \neq 0$ für

$$t \geqq a_2, \quad \sigma \geqq 1 - a_3 \frac{\log\log t}{\log t}.$$

Das bisher beste bekannte a_3 bei diesem Satz stammt von HEILBRONN[6]); er fand $a_3 \leqq \frac{1}{49{,}13}$. Ein dazugehöriges a_2 gab er aber nicht an. Wir werden im folgenden die Zulässigkeit aller $a_3 < \frac{1}{12{,}156}$ beweisen, genauer wird sich ergeben, daß $\zeta(s) \neq 0$ für $t \geqq 200$ und

$$\sigma \geqq 1 - \frac{\log\log t}{12{,}156 \log t \left(1 + 20 \frac{\log\log\log t}{\log\log t}\right)}$$

ist.

HEILBRONN benutzte seine Abschätzung von a_3, um einen möglichst kleinen Wert für a_1 in dem folgenden Satz von HOHEISEL[7]) zu gewinnen: Es sei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$. Dann gibt es ein positives $a_1 < 1$ mit

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x + x^{a_1}) - \pi(x)}{\frac{x^{a_1}}{\log x}} = 1.$$

---

5) J. E. Littlewood, *Researches in the Theory of the Riemann ζ-Function.* Proc. London Math. Soc. (2), 20 (1922), S. XXV.

6) H. Heilbronn, *Über den Primzahlsatz von Herrn Hoheisel.* Math. Zeitschr. 36 (1933), S. 394—423.

7) G. Hoheisel, *Primzahlprobleme in der Analysis.* Sitzungsber. Akad. Berlin 1930, S. 580—588.

HEILBRONN gab in seiner Arbeit für a_1 die hinreichende Bedingung

$$1 - \frac{1}{4 + \frac{5}{a_3}} < a_1 < 1$$

an und konnte somit $a_1 = 1 - \frac{1}{250}$

setzen. Benutzen wir unseren Wert $a_3 = \frac{1}{12{,}156}$, so können wir etwa

$$a_1 = 1 - \frac{1}{65}$$

nehmen. Bis zu diesem a_1 herab ist also der HOHEISELsche Satz noch richtig.

Wir wollen uns nun noch überlegen, wie es möglich ist, aus der LANDAUschen Relation[8])

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma|<x^2} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O(\log x) \qquad (\varrho = \beta + i\gamma)$$

für $$\psi(x) = \sum_{p^m \leqq x} \log p$$

unter Zuhilfenahme des CARLSONschen Satzes[9]) den Primzahlsatz

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dy}{\log y} + O\left(x e^{-a_4 \sqrt{\log x \log\log x}}\right)$$

zu beweisen, und wollen für a_4 einen bestimmten Wert angeben.

Bezeichnen wir die Anzahl der nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ mit Realteil $> \sigma$ und Imaginärteil $\leqq T$ durch $N(\sigma, T)$, so gilt nach CARLSON für jedes $\varepsilon > 0$

$$N(\sigma, T) = O\left(T^{1-(2\sigma-1)^2+\varepsilon}\right).$$

Weiter gibt es ein a_5, so daß für alle $\gamma \geqq a_5$

$$\beta < 1 - \frac{\log\log\gamma}{12{,}157 \log\gamma}$$

ist. Setzen wir ferner

$$1 - \frac{\log\log a_5}{12{,}157 \log a_5} = \Theta,$$

so wird

$$\psi(x) = x + O\left(x^\Theta \sum_{0<\gamma<x^2} \frac{1}{\gamma}\right) + O(\log x) + O\left(\int_{14}^{x^2} \frac{x^{1-\frac{\log\log\gamma}{12{,}157\log\gamma}}}{\gamma} dN(\Theta, \gamma)\right)$$

$$= x + O(x^\Theta \log^2 x) + O\left(x \int_{14}^{x^2} \frac{x^{-\frac{\log\log\gamma}{12{,}157\log\gamma}}}{\gamma} dN(\Theta, \gamma)\right).$$

---

8) E. Landau, *Über einige Summen, die von den Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion abhängen.* Acta Math. 35 (1912), S. 271—294.

9) F. Carlson, *Über die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemannschen Zetafunktion.* Arkiv för Mat., Astr. och Fysik 15 (1920), Nr. 20.

Nun ist

$$\int_{14}^{x^2} \frac{x^{-\frac{\log\log\gamma}{12{,}157\log\gamma}}}{\gamma} dN(\Theta,\gamma)$$

$$= O(1) + \int_{14}^{x^2} \frac{N(\Theta,\gamma)}{\gamma^2} x^{-\frac{\log\log\gamma}{12{,}157\log\gamma}} \left\{1 - \frac{\log\log\gamma - 1}{12{,}157\log^2\gamma}\log x\right\} d\gamma$$

$$= O(1) + O\left(\log x \int_{14}^{x^2} \frac{N(\Theta,\gamma)}{\gamma^2} x^{-\frac{\log\log\gamma}{12{,}157\log\gamma}} d\gamma\right)$$

$$= O(1) + O\left(\log x \int_{14}^{x^2} \frac{x^{-\frac{\log\log\gamma}{12{,}157\log\gamma}}}{\gamma^{1+(2\Theta-1)^2-\varepsilon}} d\gamma\right).$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(2\Theta - 1)^2 = \alpha,$$

bestimmen dann ein festes η mit $0 < \eta < \alpha$ und untersuchen weiter

$$\int_{14}^{x^2} \frac{x^{-\frac{\log\log\gamma}{12{,}157\log\gamma}}}{\gamma^{1+\alpha-\varepsilon}} d\gamma = \int_{14}^{x^2} \frac{x^{-\frac{\log\log\gamma}{12{,}157\log\gamma}}}{\gamma^{\alpha-\eta}} \frac{d\gamma}{\gamma^{1+\eta-\varepsilon}}.$$

Die Funktion von γ

$$\frac{x^{-\frac{\log\log\gamma}{12{,}157\log\gamma}}}{\gamma^{\alpha-\eta}} = e^{-\frac{\log\log\gamma\log x}{12{,}157\log\gamma} - (\alpha-\eta)\log\gamma}$$

erreicht bei festem x ihr Maximum an der Stelle, die durch

$$\frac{\log\log\gamma - 1}{12{,}157\,\gamma\log^2\gamma}\log x - \frac{\alpha-\eta}{\gamma} = 0$$

oder

$$\frac{\log^2\gamma}{\log\log\gamma - 1} = \frac{\log x}{12{,}157\,(\alpha-\eta)}$$

bestimmt ist. An dieser Maximumsstelle wird aber

$$-\frac{\log\log\gamma\log x}{12{,}157\log\gamma} - (\alpha-\eta)\log\gamma$$

$$= -\sqrt{\frac{(\alpha-\eta)\log x}{12{,}157}}\left(\frac{\log\log\gamma}{\sqrt{\log\log\gamma - 1}} + \sqrt{\log\log\gamma - 1}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{(\alpha-\eta)\log x}{12{,}157}}\,\frac{2\log\log\gamma - 1}{\sqrt{\log\log\gamma - 1}} < -2\sqrt{\frac{\alpha-\eta}{12{,}157}\log x\log\log\gamma}.$$

Wegen $\log\log\gamma = \frac{1}{2}\log\log x + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\log\log\gamma - 1}{12{,}157\,(\alpha-\eta)}\right)$

ist nun für hinreichend großes x

$$\log\log\gamma > \tfrac{1}{2}\log\log x,$$

also wird dort

$$-\frac{\log\log\gamma\log x}{12{,}157\log\gamma} - (\alpha-\eta)\log\gamma < -\sqrt{\frac{\alpha-\eta}{6{,}0785}\log x\log\log x}.$$

Es ergibt sich endlich

$$\psi(x) = x + O(x^{\Theta}\log^2 x) + O\left(xe^{-\sqrt{\frac{\alpha-\eta}{6{,}0785}\log x\log\log x}}\int_{14}^{x^2}\frac{d\gamma}{\gamma^{1+\eta-\varepsilon}}\log x\right)$$

$$= x + O\left(\frac{x}{\eta-\varepsilon}e^{-\sqrt{\frac{\alpha-\varepsilon}{6{,}0785}\log x\log\log x}}\log x\right).$$

Nun läßt sich aber α beliebig nahe an 1 und η beliebig nahe an 0 wählen; es ist also auch

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-\sqrt{\frac{\log x\log\log x}{6{,}079}}}\right).$$

Weiter ist $\psi(x) = \sum_{p^m \leqq x}\log p, \quad \vartheta(x) = \sum_{p\leqq x}\log p,$

also $\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \cdots.$

Daraus schließt man

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) \leqq \vartheta(x) \leqq \psi(x),$$

so daß auch $\vartheta(x) = x + O\left(xe^{-\sqrt{\frac{\log x\log\log x}{6{,}079}}}\right)$

wird. Jetzt gehen wir zu $\pi(x)$ über. Es ist nämlich

$$\pi(x) = \sum_{p\leqq x} 1 = \int_2^x \frac{d\vartheta(y)}{\log y} = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(y)}{y\log y}\,dy;$$

daher wird

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dy}{\log y} + O\left(\frac{x}{\log x}e^{-\sqrt{\frac{\log x\log\log x}{6{,}079}}}\right) + O\left(\int_2^x \frac{e^{-\sqrt{\frac{\log y\log\log y}{6{,}079}}}}{\log^2 y}\,dy\right).$$

Hierin ist aber

$$\int_2^x \frac{e^{-\sqrt{\frac{\log y\log\log y}{6{,}079}}}}{\log^2 y}\,dy = O\left(xe^{-\sqrt{\frac{\log x\log\log x}{6{,}079}}}\int_2^x \frac{dy}{y\log^2 y}\right)$$

$$= O\left(xe^{-\sqrt{\frac{\log x\log\log x}{6{,}079}}}\right).$$

Wir erhalten also den Primzahlsatz in der Form

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dy}{\log y} + O\left(x e^{-0{,}405\sqrt{\log x \log\log x}}\right).$$

Es kann demnach $a_4 = 0{,}405$ angenommen werden.

§ 1. Hilfssätze.

Hilfssatz 1: *Ist $f(x)$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$(2) \qquad \sum_{n=a}^{b} f(n) = f(a) + \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b (x - [x])\,f'(x)\,dx$$

und

$$(3) \qquad \sum_{n=a}^{b} f(n) = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \left(x - [x] - \tfrac{1}{2}\right) f'(x)\,dx.$$

Beweis: Fassen wir die Summe als STIELTJES-Integral auf und integrieren wir partiell, so wird

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) - \int_a^b f(x)\,dx = f(a) + \int_a^b f(x)\,d([x] - x)$$

$$= f(a) + \int_a^b (x - [x])\,f'(x)\,dx,$$

woraus auch (3) sofort folgt.

Hilfssatz 2: *Für jeden Punkt, der nicht auf der Halbgeraden $\sigma \leqq -1$, $t = 0$ liegt, gilt*

$$(4) \qquad \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log(1+s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{2(1+s)} + \int_1^\infty \frac{x - [x] + \frac{1}{2}}{(x+s)^2}\,dx,$$

wobei für den Logarithmus der Hauptwert zu nehmen ist.

Beweis: Es ist bekanntlich

$$(5) \qquad \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -C - \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s}\right).$$

Setzen wir zunächst s reell > 0 voraus. Die in (5) auftretende EULERsche Konstante ist als

$$(6) \qquad C = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} - \log n\right)$$

definiert; es ist aber nach Hilfssatz 1

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \log n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^n \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^2}\, dx,$$

also

$$C = \frac{1}{2} - \int_1^\infty \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^2}\, dx. \tag{7}$$

Nun wird nach (3)

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -C - \frac{1}{s} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1+s}\right) + \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+s}\right) dx$$

$$- \int_1^\infty \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x^2}\, dx + \int_1^\infty \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{(x+s)^2}\, dx$$

$$= \log(1+s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{2(1+s)} + \int_1^\infty \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{(x+s)^2}\, dx.$$

Analytische Fortsetzung lehrt aber, daß (4) in jedem abgeschlossenen Bereich der s-Ebene gilt, der von der Halbgeraden $\sigma \leqq -1$, $t = 0$ einen endlichen Abstand hat.

Hilfssatz 3: *Für* $1 < \sigma \leqq 2$, $|t| \geqq 200$ *ist*

$$-\Re \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < \frac{1}{2} \log t - 0{,}889 - \sum_{\varrho} \frac{\sigma - \beta}{(\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2}, \tag{8}$$

also a fortiori

$$-\Re \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < \frac{1}{2} \log t - 0{,}889. \tag{9}$$

Beweis: Aus der Weierstrassschen Produktzerlegung von $(s-1)\zeta(s)$ folgt

$$-\Re \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{C}{2} + 1 - \log 2\pi + \frac{\sigma - 1}{(\sigma-1)^2 + t^2} + \frac{1}{2} \Re \frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)}$$

$$- \sum_{\varrho} \left(\frac{\sigma - \beta}{(\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \right).$$

Nun ist in unserem Bereich nach (4)

$$\frac{1}{2}\Re\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} < \frac{1}{2}\log\left|\frac{s}{2}+2\right| + \int_1^\infty \frac{dx}{(2x+2+\sigma)^2+t^2}$$

$$< \frac{1}{2}\log t + \frac{9}{t^2} - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4t} < \frac{1}{2}\log t - 0{,}341,$$

also

$$-\Re\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < \frac{1}{2}\log t - 0{,}341 - 0{,}549 + 0{,}001 - \sum_\varrho \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\log t - 0{,}889 - \sum_\varrho \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}.$$

Hilfssatz 4: *Für $\sigma > 1$ ist*

$$\frac{1}{\sigma-1} < \zeta(\sigma) < 1 + \frac{1}{\sigma-1}, \tag{10}$$

$$\frac{1}{(\sigma-1)^2} - \frac{1}{\sigma} < -\zeta'(\sigma) < \frac{1}{(\sigma-1)^2} + \frac{1}{\sigma}, \tag{11}$$

also

$$\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{\sigma-1} - \frac{\sigma-1}{\sigma}\right) < -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma-1} + \frac{\sigma-1}{\sigma}. \tag{12}$$

Beweis: Nach (2) ist für $\sigma > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx, \tag{13}$$

also gilt (10). Ebenso ist nach (2)

$$\left.\begin{aligned} -\zeta'(s) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\log n}{n^s} = \int_1^\infty \frac{\log x}{x^s}\,dx - s\int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\log x\,dx + \int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx \\ &= \frac{1}{(s-1)^2} - s\int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\log x\,dx + \int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

also gilt (11).

§ 2. Ein nullstellenfreies Gebiet im kritischen Streifen.

Nach BACKLUND[10]) haben alle nichttrivialen Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ von $\zeta(s)$ mit $|\gamma| \leqq 200$ den Realteil $\frac{1}{2}$. Wir dürfen also im folgenden $|\gamma| > 200$ annehmen.

10) R. J. Backlund, *Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion*. Dissertation Helsingfors 1916.

Satz 1: *Im Streifen*

$$1 - \frac{1}{17{,}537 \log t} \leqq \sigma \leqq 1\,,\ t \geqq 200 \tag{15}$$

liegen keine Nullstellen von $\zeta(s)$.

Beweis: Für alle reellen φ ist

$$2(1+\cos\varphi)^2(1+4\cos\varphi)^2 = 47 + 80\cos\varphi + 49\cos 2\varphi + 20\cos 3\varphi + 4\cos 4\varphi \geqq 0\,. \tag{16}$$

Wegen

$$-\Re\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\cos(t\log n) \qquad (\sigma>1) \tag{17}$$

ist also für $\sigma > 1$

$$0 \leqq -47\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 80\,\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i\gamma) - 49\,\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2i\gamma) - 20\,\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+3i\gamma) - 4\,\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+4i\gamma)\,. \tag{18}$$

Nun sei $\varrho = \beta + i\gamma$ eine Nullstelle von $\zeta(s)$ mit $\gamma \geqq 200$. Dann ist nach (8)

$$-\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i\gamma) < \frac{1}{2}\log\gamma - 0{,}889 - \frac{1}{\sigma-\beta}\,.$$

Die anderen Glieder in (18) werden mittels (9) abgeschätzt. Es ergibt sich

$$\frac{80}{\sigma-\beta} \leqq -47\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + 76{,}5\log\gamma - 136{,}017 + 28{,}5\log 2 + 10\log 3 < -47\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + 76{,}5\log\gamma - 105{,}276\,.$$

Wir setzen nun $\sigma = 1 + \frac{1}{A\log\gamma}$,

wo $A > 0$ eine noch näher zu bestimmende Konstante ist, und erhalten, wenn wir (12) benutzen,

$$\frac{80}{1-\beta+\frac{1}{A\log\gamma}} < 47A\log\gamma + \frac{47}{A\sigma\log\gamma} + 76{,}5\log\gamma - 105{,}276 \leqq (47A+76{,}5)\log\gamma + \frac{47}{A\log 200+1} - 105{,}276 < (47A+76{,}5)\log\gamma$$

oder $$\beta < 1 - \left(\frac{80}{47A+76{,}5} - \frac{1}{A}\right)\frac{1}{\log\gamma}\,.$$

Setzen wir hierin $$A = \frac{76{,}5}{\sqrt{47}\,(\sqrt{80}-\sqrt{47})}\,,$$

so folgt $$\beta < 1 - \frac{(\sqrt{80}-\sqrt{47})^2}{76{,}5\log\gamma} < 1 - \frac{1}{17{,}537\log\gamma}\,.$$

§ 3. Hilfssätze über trigonometrische Summen.

Hilfssatz 5: *Ist* $N > 1$, α_ν *reell,*

$$0 < \vartheta \leqq \alpha_2 - \alpha_1 \leqq \alpha_3 - \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_N - \alpha_{N-1} \leqq 1 - \vartheta, \tag{19}$$

so ist

$$\left| \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \alpha_n} \right| < \operatorname{ctg} \frac{\pi\vartheta}{2}, \tag{20}$$

also a fortiori

$$\left| \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \alpha_n} \right| < \frac{2}{\pi\vartheta}. \tag{21}$$

Beweis: Siehe E. LANDAU, Gött. Nachr. 1928, S. 19 und 23.

Hilfssatz 6: *Es seien a und b ganz,* $a < b - 2$ *und* $f(x)$ *für jedes ganze x im Intervall* $a \leqq x < b$ *definiert und reell. Ist*

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x)$$

im Intervall $a \leqq x < b - 2$ *entweder stets* $\geqq r > 0$ *oder stets* $\leqq -r < 0$, *so gilt*

$$\left| \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)} \right| < 2{,}637 \, \frac{|\Delta f(b-2) - \Delta f(a)| + 2}{\sqrt{r}}. \tag{22}$$

Beweis[11]: Wir dürfen $r > 0$ voraussetzen, denn sonst betrachten wir statt $f(x)$ die Funktion $-f(x)$, wobei $\Delta f(x)$ und $\Delta^2 f(x)$ das Vorzeichen wechseln. Weiter darf $r < 1$ vorausgesetzt werden; denn für $r \geqq 1$ ist (22) wegen

$$\begin{aligned} 2{,}637 \, \frac{|\Delta f(b-2) - \Delta f(a)| + 2}{\sqrt{r}} &\geqq 2{,}637 \, \frac{(b-a-2)r + 2}{\sqrt{r}} = 2{,}637 \, \frac{r - \frac{2(r-1)}{b-a}}{\sqrt{r}} (b-a) \\ &\geqq 2{,}637 \, (b-a) \, \frac{r+2}{3\sqrt{r}} = 0{,}879 \, (b-a) \left(\sqrt{r} + \frac{2}{\sqrt{r}} \right) \\ &\geqq 0{,}879 \, (b-a) \, 2\sqrt{2} > b - a \end{aligned}$$

trivial. Es darf sogar $\sqrt{r} < 0{,}38$ vorausgesetzt werden; denn sonst ist

$$2{,}637 \, \frac{|\Delta f(b-2) - \Delta f(a)| + 2}{\sqrt{r}} \geqq 2{,}637 \, (b-a) \sqrt{r} \geqq 2{,}637 \cdot 0{,}38 \, (b-a) > b - a.$$

11) Nach einer Mitteilung von Herrn van der Corput wird sein Beweis dieses Satzes (vgl. Anm. 3) in den Proc. Akad. Wiss. Amsterdam (September-, Oktober- und Novembersitzung 1937) erscheinen.

Es sei also jetzt

$$\sqrt{r} < 0{,}38\,. \tag{23}$$

Schreiben wir die Zahlen $\Delta f(a)$, $\Delta f(a+1)$, $\Delta f(a+2)$, ..., $\Delta f(b-2)$ in einer Reihe an, so wachsen sie jedesmal mindestens um r. Ist m irgendeine ganze Zahl mit

$$[\Delta f(a)] \leqq m \leqq [\Delta f(b-2)]\,,$$

so schreiben wir alle $\Delta f(x)$ an, die in das Intervall $\langle m, m+1)$ fallen:

$$m \leqq \Delta f(x_m) < \Delta f(x_m+1) < \Delta f(x_m+2) < \cdots < \Delta f(x_m+\mu_m) < m+1\,.$$

Es ist dann sogar

$$\begin{aligned} m + \mu_m r \leqq \Delta f(x_m) + \mu_m r &\leqq \Delta f(x_m+1) + (\mu_m - 1)\,r \\ &\leqq \cdots \leqq \Delta f(x_m+\mu_m) < m+1\,. \end{aligned}$$

Wir zerlegen die abzuschätzende Summe folgendermaßen:

$$\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)} = \sum_{m=[\Delta f(a)]}^{[\Delta f(b-2)]} \sum_{\nu=0}^{\mu_m} e^{2\pi i f(x_m+\nu)}\,. \tag{24}$$

Jede innere Summe wird mit einem noch näher zu bestimmenden ganzen q weiter zerlegt:

$$\sum_{\nu=0}^{\mu_m} e^{2\pi i f(x_m+\nu)} = \sum_{\nu=0}^{q-1} + \sum_{\nu=q}^{\mu_m-q+1} + \sum_{\nu=\mu_m-q+2}^{\mu_m}\,. \tag{25}$$

Wir führen nun eine neue Funktion $g(x)$ durch

$$g(x_m+\nu) = f(x_m+\nu) - \nu m \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, \mu_m)$$

ein. Dann ist $$e^{2\pi i f(x_m+\nu)} = e^{2\pi i g(x_m+\nu)}$$

und $$\Delta g(x_m+\nu) = \Delta f(x_m+\nu) - m \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, \mu_m - 1),$$

also $$\begin{aligned} \mu_m r \leqq \Delta g(x_m) + \mu_m r &\leqq \Delta g(x_m+1) + (\mu_m - 1)\,r \\ &\leqq \cdots \leqq \Delta g(x_m+\mu_m) < 1\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber, daß

$$qr \leqq \Delta g(x_m+q) \leqq \Delta g(x_m+q+1) \leqq \cdots \leqq \Delta g(x_m+\mu_m-q) < 1-qr$$

ist. Enthält also die mittlere Summe in (25) mehr als ein Glied, so folgt aus Hilfssatz 5 mit $\vartheta = qr$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\mu_m} e^{2\pi i f(x_m+\nu)} \right| < 2q - 1 + \frac{2}{\pi q r}\,.$$

Setzen wir nun $$q = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi r}}\right] + 1,$$

so wird

$$2q - 1 + \frac{2}{\pi q r} < \frac{2}{\sqrt{\pi r}} + 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi r}} = \frac{4}{\sqrt{\pi r}} + 1 < \frac{\frac{4}{\sqrt{\pi}} + 0{,}38}{\sqrt{r}} < \frac{2{,}637}{\sqrt{r}}.$$

Die gleiche Abschätzung gilt aber auch, wenn die mittlere Summe leer ist oder nur ein Glied enthält; denn wegen (23) ist

$$1 < \frac{2}{\sqrt{\pi r}}.$$

Überhaupt gelten alle unsere Abschätzungen a fortiori, wenn die entsprechenden Summen leer sind. Da es genau

$$|[\Delta f(b-2)] - [\Delta f(a)]| + 1$$

m-Intervalle gibt, erhalten wir endlich die Behauptung (22).

Hilfssatz 7: *Ist* $0 \leqq \varrho - 1 \leqq b - a$, ϱ *ganz,* $f(x)$ *für jedes ganze* x *im Intervall* $a \leqq x < b$ *definiert und reell, so gilt*

$$(26) \quad \left|\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right|^2 \leqq \frac{2}{\varrho}(b-a)^2 + \frac{4}{\varrho^2}(b-a)\sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho - q)\left|\sum_{x=a}^{b-q-1} e^{2\pi i(f(x+q)-f(x))}\right|.$$

(Für $\varrho = 1$ ist das zweite Glied rechts einfach wegzulassen.)

Beweis: (26) ist ein Spezialfall eines Satzes von VAN DER CORPUT, Math. Zeitschrift 29 (1929), S. 406—408.

§ 4. Der van der Corputsche Satz über die k-te Ableitung.

Hilfssatz 8: *Es sei* $k \geqq 2$, $\varkappa = 2^k$, $f(x)$ *reell, im Intervall* $a \leqq x \leqq b - 1$ (a *und* b *ganz,* $a < b$) k*-mal stetig differenzierbar und dort*

$$(27) \qquad 0 < r_k \leqq |f^{(k)}(x)| \leqq R_k.$$

Ferner sei

$$(28) \qquad b - a \leqq A.$$

Dann ist für $k = 2$

$$(29) \qquad S = \left|\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < 2{,}637\, A\, R_2 r_2^{-\frac{1}{2}} + 5{,}274\, r_2^{-\frac{1}{2}}.$$

Für $k \geqq 3$ setzen wir noch

(30) $$A^3 R_k r_k > \frac{1}{8\pi^2}$$

und

(31) $$A^2 R_k^2 r_k^{-1} > 1$$

voraus. Dann ist für $k \geqq 3$

(32) $$S = \left| \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)} \right| < 11{,}55\, A\, R_k^{\frac{2}{x-2}} r_k^{-\frac{1}{x-2}}.$$

Beweis: Ist $a < b - 2$, so folgt wegen

$$\Delta^2 f(x) = \int_x^{x+1} dy \int_y^{y+1} f''(z)\, dz$$

aus (27) $$|\Delta f(b-2) - \Delta f(a)| \leqq (b - a - 2)\, R_2$$

und $$|\Delta^2 f(x)| \geqq r_2,$$

also liefert Hilfssatz 6 die Formel (29). Ist aber $1 \leqq b - a \leqq 2$, so ist im Falle $r_2 \leqq 1$

$$S \leqq 2 < 5{,}274\, r_2^{-\frac{1}{2}}$$

und im Falle $r_2 > 1$ wegen $R_2 \geqq r_2$

$$S \leqq 2 < 2{,}637 \sqrt{r_2} \leqq 2{,}637\, A\, R_2 r_2^{-\frac{1}{2}}.$$

(29) ist also immer richtig.

Die Behauptungen für $k \geqq 3$ leiten wir aus (29) durch Induktion mittels (26) her. Der Übergang von einer Funktion $f(x)$ zu einer Differenzfunktion

$$g(x) = f(x + q) - f(x)$$

vollzieht sich dabei so: Es ist

$$g^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(x + q) - f^{(k-1)}(x) = \int_x^{x+q} f^{(k)}(x)\, dx,$$

wir können also

(33) $$\begin{cases} A(g) = A(f), \\ r_{k-1}(g) = q\, r_k(f), \\ R_{k-1}(g) = q\, R_k(f) \end{cases}$$

nehmen. Diese Festsetzungen haben außerdem noch zur Folge, daß die Ungleichungen (30) und (31) für $g(x)$ richtig sind, wenn sie es für $f(x)$ sind. Wir sind also zum Induktionsschluß berechtigt.

Es werde zunächst der Fall $k = 3$ behandelt. Wir wenden auf die Summe rechts in (26) die Formel (29) an und erhalten

$$(34)\qquad \left|\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right|^2 \leqq \frac{2}{\varrho} A^2 + \frac{4A}{\varrho^2}\frac{2{,}637}{\sqrt{r_3}}\sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q)\left(AR_3\sqrt{q}+\frac{2}{\sqrt{q}}\right).$$

Nun ist aber

$$\sum_{q=1}^{\varrho-1}\sqrt{q} < \int_1^{\varrho-1}\sqrt{x}\,dx + \sqrt{\varrho-1} = \frac{2}{3}[u]^{\frac{3}{2}} + [u]^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3},$$

$$\sum_{q=1}^{\varrho-1}\sqrt{q} > \int_0^{\varrho-1}\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}[u]^{\frac{3}{2}},$$

$$\sum_{q=1}^{\varrho-1}\frac{1}{\sqrt{q}} < 1 + \int_1^{\varrho-1}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2[u]^{\frac{1}{2}} - 1,$$

$$\sum_{q=1}^{\varrho-1} q\sqrt{q} > 1 + \int_1^{\varrho-1} x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}[u]^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{5},$$

wobei wir

$$(35)\qquad \varrho = [u] + 1, \quad 0 \leqq [u] \leqq b - 1$$

gesetzt haben. Dabei ist für das unmittelbar Folgende nur der Fall $\varrho > 1$ von Bedeutung, weil für $\varrho = 1$ das zweite Glied rechts in (34) wegzulassen ist. Die Summe rechts in (34) ist also höchstens gleich

$$A R_3\left(\frac{4}{15}[u]^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{3}[u]^{\frac{3}{2}} + [u]^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}[u] - \frac{19}{15}\right) + 2\left(\frac{4}{3}[u]^{\frac{3}{2}} + 2[u]^{\frac{1}{2}} - [u] - 1\right)$$
$$\leqq A R_3[u]^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}[u]^{\frac{3}{2}}.$$

Wir erhalten somit

$$S^2 \leqq 2A^2u^{-1} + 4Au^{-2}\cdot 2{,}637 r_3^{-\frac{1}{2}}\left(AR_3u^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$= 2A^2u^{-1} + 4A^2u^{\frac{1}{2}}R_3r_3^{-\frac{1}{2}}\cdot 2{,}637 + \frac{32}{3}\cdot 2{,}637 A u^{-\frac{1}{2}}r_3^{-\frac{1}{2}}.$$

Hierin nehmen wir $\qquad u = R_3^{-\frac{2}{3}}r_3^{\frac{1}{3}}$

an, was nach (31) zulässig ist. Ist nämlich $b - a < R_3^{-\frac{2}{3}}r_3^{\frac{1}{3}}$, so ist wegen (31) trivialerweise

$$S \leqq b - a < R_3^{-\frac{2}{3}}r_3^{\frac{1}{3}} < AR_3^{\frac{1}{3}}r_3^{-\frac{1}{6}}.$$

Dann folgt

$$S^2 \leqq (2 + 4\cdot 2{,}637) A^2 R_3^{\frac{2}{3}} r_3^{-\frac{1}{3}} + \frac{32}{3}\cdot 2{,}637 A R_3^{\frac{1}{3}} r_3^{-\frac{2}{3}}.$$

Nach (30) ist aber

$$A R_3^{\frac{1}{3}} r_3^{-\frac{2}{3}} = \frac{A^2 R_3^{\frac{1}{3}} r_3^{-\frac{2}{3}}}{A} < A^2 R_3^{\frac{1}{3}} r_3^{-\frac{2}{3}} \sqrt[3]{8\pi^2}\, R_3^{\frac{1}{3}} r_3^{\frac{1}{3}} < 4{,}291\, A^2 R_3^{\frac{2}{3}} r_3^{-\frac{1}{3}},$$

es wird also endlich

$$S < \sqrt{2 + 4 \cdot 2{,}637 + \frac{32}{3} \cdot 2{,}637 \cdot 4{,}291}\, A R_3^{\frac{1}{3}} r_3^{-\frac{1}{6}} < 11{,}544\, A R_3^{\frac{1}{3}} r_3^{-\frac{1}{6}}.$$

Es sei jetzt für ein $k \geqq 3$

$$\left| \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)} \right| < c_k A R_k^{\frac{2}{x-2}} r_k^{-\frac{1}{x-2}}$$

mit $c_k < 11{,}56$ bewiesen. Dann wird also

$$\left| \sum_{x=a}^{b-q-1} e^{2\pi i (f(x+q)-f(x))} \right| < c_k q^{\frac{1}{x-2}} A R_{k+1}^{\frac{2}{x-2}} r_{k+1}^{-\frac{1}{x-2}}$$

und weiter

$$\sum_{q=1}^{\varrho-1} (\varrho - q) \left| \sum_{x=a}^{b-q-1} e^{2\pi i (f(x+q)-f(x))} \right| < c_k A R_{k+1}^{\frac{2}{x-2}} r_{k+1}^{-\frac{1}{x-2}} \sum_{q=1}^{\varrho-1} (\varrho - q)\, q^{\frac{1}{x-2}}$$

$$< c_k A R_{k+1}^{\frac{2}{x-2}} r_{k+1}^{-\frac{1}{x-2}} \left(\frac{x-2}{x-1} [u]^{\frac{2x-3}{x-2}} + [u]^{\frac{x-1}{x-2}} - \frac{x-2}{x-1} [u] + \frac{x-2}{x-1} [u]^{\frac{x-1}{x-2}} \right.$$

$$\left. + [u]^{\frac{1}{x-2}} - \frac{x-2}{x-1} - \frac{x-2}{2x-3} [u]^{\frac{2x-3}{x-2}} \right)$$

$$= c_k A R_{k+1}^{\frac{2}{x-2}} r_{k+1}^{-\frac{1}{x-2}} \left(\frac{(x-2)^2}{(x-1)(2x-3)} [u]^{\frac{2x-3}{x-2}} + \frac{2x-3}{x-1} [u]^{\frac{x-1}{x-2}} - \frac{x-2}{x-1} [u] \right.$$

$$\left. + [u]^{\frac{1}{x-2}} - \frac{x-2}{x-1} \right)$$

$$< c_k \frac{5x^2 - 16x + 13}{2x^2 - 5x + 3} A R_{k+1}^{\frac{2}{x-2}} r_{k+1}^{-\frac{1}{x-2}} [u]^{\frac{2x-3}{x-2}} < \frac{5}{2} c_k A R_{k+1}^{\frac{2}{x-2}} r_{k+1}^{-\frac{1}{x-2}} u^{\frac{2x-3}{x-2}}$$

wegen

$$\sum_{q=1}^{\varrho-1} q^{\frac{1}{x-2}} \leqq \int_1^{\varrho-1} x^{\frac{1}{x-2}} dx + (\varrho - 1)^{\frac{1}{x-2}} = \frac{x-2}{x-1} [u]^{\frac{x-1}{x-2}} + [u]^{\frac{1}{x-2}} - \frac{x-2}{x-1},$$

$$\sum_{q=1}^{\varrho-1} q^{\frac{x-1}{x-2}} \geqq \int_0^{\varrho-1} x^{\frac{x-1}{x-2}} dx = \frac{x-2}{2x-3} [u]^{\frac{2x-3}{x-2}}$$

und

$$\frac{5x^2 - 16x + 13}{2x^2 - 5x + 3} < \frac{5x^2 - 15x + 15}{2x^2 - 6x + 6} = \frac{5}{2}.$$

Der Hilfssatz 7 liefert nun

$$S^2 < 2A^2\varrho^{-1} + 4A^2\varrho^{-2}\frac{5}{2}c_k R_{k+1}^{\frac{2}{\varkappa-2}} r_{k+1}^{-\frac{1}{\varkappa-2}} u^{\frac{2\varkappa-3}{\varkappa-2}}$$

$$\leqq 2A^2u^{-1} + 10c_kA^2R_{k+1}^{\frac{2}{\varkappa-2}} r_{k+1}^{-\frac{1}{\varkappa-2}} u^{\frac{1}{\varkappa-2}}.$$

Wir setzen jetzt $$u = R_{k+1}^{-\frac{2}{\varkappa-1}} r_{k+1}^{\frac{1}{\varkappa-1}},$$

was wegen (31) zulässig ist. Ist nämlich $b - a < R_{k+1}^{-\frac{2}{\varkappa-1}} r_{k+1}^{\frac{1}{\varkappa-1}}$, so ist wegen (31) trivialerweise

$$S \leqq b - a < R_{k+1}^{-\frac{2}{\varkappa-1}} r_{k+1}^{\frac{1}{\varkappa-1}} < AR_{k+1}^{\frac{2}{2\varkappa-2}} r_{k+1}^{-\frac{1}{2\varkappa-2}}.$$

Dann ergibt sich

$$S < c_{k+1}AR_{k+1}^{\frac{2}{2\varkappa-2}} r_{k+1}^{-\frac{1}{\varkappa-2}}$$

mit $$c_{k+1} = \sqrt{2 + 10c_k} \leqq \sqrt{2 + 115{,}5} < 11{,}55.$$

Damit ist der Hilfssatz 8 bewiesen.

§ 5. Eine Abschätzung für die Größenordnung von $\zeta(s)$ im kritischen Streifen.

Hilfssatz 9: *Es sei $T \geqq 1$ ganz und $f(z)$ eine analytische Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *$f(z)$ sei regulär in der Halbebene $x \geqq T - \frac{1}{2}$.*

2. *Für jedes beliebig große β und $T - \frac{1}{2} \leqq x \leqq \beta$ gelte gleichmäßig in x*

$$\lim_{y \to +\infty} e^{-2\pi|y|} f(z) = 0.$$

3. *Es sei* $$\lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|y|} |f(z)|\, dy = 0.$$

4. *Es konvergiere die Reihe*

$$\sum_{n=T}^{\infty} f(n).$$

Dann ist

$$(36)\quad \sum_{n=T}^{\infty} f(n) = \int_{T-\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)\, dx - i\int_0^{\infty} \frac{f(T - \frac{1}{2} + iy) - f(T - \frac{1}{2} - iy)}{e^{2\pi y} + 1}\, dy.$$

Beweis: Siehe E. Lindelöf, Le Calcul des Résidus, Paris 1905, S. 52—59.

Hilfssatz 10: *Für* $\sigma \geqq \frac{1}{4}$, $t \geqq 100$ *ist*

$$\left| \sum_{n=1}^{\left[\frac{t}{2}\right]} n^{-s} - \zeta(s) \right| < 0{,}340. \tag{37}$$

Beweis: Betrachten wir die Funktion

$$f(z) = z^{-s},$$

so sind die Bedingungen des vorigen Hilfssatzes für $x > 0$, $\sigma > 1$ erfüllt. Es wird also für $\sigma > 1$, wenn $T \geqq 2$ eine ganze Zahl ist,

$$\zeta(s) - \sum_{n=1}^{T-1} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{(s-1)\left(T-\frac{1}{2}\right)^{s-1}} - 2\int_0^\infty \frac{\left((T-\frac{1}{2})^2+y^2\right)^{-\frac{s}{2}}}{e^{2\pi y}+1} \sin\left(s \operatorname{arctg} \frac{y}{T-\frac{1}{2}}\right) dy. \tag{38}$$

Analytische Fortsetzung lehrt nun, daß (38) in der ganzen Ebene gültig ist.

Einfache Abschätzung der rechten Seite ergibt für $\sigma \leqq 1$

$$\left| \zeta(s) - \sum_{n=1}^{T-1} n^{-s} \right| \leqq \frac{T^{1-\sigma}}{t} + \frac{1}{\left(T-\frac{1}{2}\right)^\sigma} \int_0^\infty \frac{e^{t \operatorname{arctg} \frac{y}{T-\frac{1}{2}}}+1}{e^{2\pi y}} dy$$

$$< \frac{T^{1-\sigma}}{t} + \frac{1}{\left(T-\frac{1}{2}\right)^\sigma} \left(\frac{1}{2\pi} + \int_0^\infty e^{\left(\frac{t}{T-\frac{1}{2}} - 2\pi\right) y} dy \right).$$

Ist also

$$\frac{t}{T-\frac{1}{2}} < \alpha < 2\pi,$$

so wird

$$\left| \zeta(s) - \sum_{n=1}^{T-1} n^{-s} \right| < \frac{T^{1-\sigma}}{t} + \left(T-\frac{1}{2}\right)^{-\sigma} \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi-\alpha} \right).$$

Setzen wir jetzt

$$T = \left[\frac{t}{2}\right] + 1,$$

so kann $\alpha = 2{,}02$ genommen werden, so daß wegen $t \geqq 100$, $\sigma \geqq \frac{1}{4}$

$$\left| \zeta(s) - \sum_{n=1}^{T-1} n^{-s} \right| < \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{t}}{\left(\left[\frac{t}{2}\right]+1\right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi-2{,}02}}{\left(\left[\frac{t}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$< \frac{1{,}02+0{,}319+0{,}470}{\sqrt[4]{50{,}5}} = \frac{1{,}809}{\sqrt[4]{808}} < \frac{1{,}809}{5{,}331} < 0{,}340$$

wird. Damit ist (37) für $\frac{1}{4} \leqq \sigma \leqq 1$ bewiesen.

Für $\sigma \geqq 1$ erhalten wir aus (38) entsprechend

$$\left| \zeta(s) - \sum_{n=1}^{T-1} n^{-s} \right| < \frac{1}{t} + \frac{1}{T-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{e^{t \operatorname{arctg} \frac{y}{T-\frac{1}{2}}}}{e^{2\pi y}+1} dy$$

$$< \frac{1}{t} + \frac{1}{T-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi-\alpha} \right) < \frac{1}{t} + \frac{1}{\left[\frac{t}{2}\right]} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) < 0{,}02.$$

Satz 2: *Für* $t \geqq 100$, $\sigma \geqq \frac{1}{4}$ *ist*

$$|\zeta(s)| < 22{,}41\, t^{\frac{\log 2 \frac{1-\sigma}{1}}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} \log t. \tag{39}$$

Beweis: Wir benutzen (37) und haben also die Summe

$$\sum_{n=1}^{\left[\frac{t}{2}\right]} n^{-s}$$

zu betrachten. Wir zerlegen sie folgendermaßen:

$$\sum_{n=1}^{\left[\frac{t}{2}\right]} n^{-s} = 1 + \sum_{n=2}^{3} + \sum_{n=4}^{7} + \sum_{n=8}^{15} + \cdots + \sum_{n=2^{\left[\frac{\log\left[\frac{t}{2}\right]}{\log 2}\right]}}^{\left[\frac{t}{2}\right]}. \tag{40}$$

Auf der rechten Seite von (40) stehen

$$\left[\frac{\log\left[\frac{t}{2}\right]}{\log 2}\right] \leqq \frac{\log \frac{t}{2}}{\log 2} < 1{,}443 \log t \tag{41}$$

Summen, alle von der Form

$$\sum_{n=N}^{N'} \frac{n^{-it}}{n^\sigma} \qquad (N \leqq N' < 2N).$$

Partielle Summation zeigt nun, daß

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{n^{-it}}{n^\sigma} \right| < \frac{1}{N^\sigma} \operatorname*{Max}_{N \leqq N'' \leqq N'} \left| \sum_{n=N}^{N''} n^{-it} \right|$$

ist. Die Summe rechts läßt sich unter der Voraussetzung

$$N < t^{\frac{1}{k-\frac{3}{2}}} \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots) \tag{42}$$

mittels Hilfssatz 8 abschätzen. Es ist hier

$$f(x) = -\frac{t}{2\pi}\log x, \quad f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{t}{2\pi}\frac{(k-1)!}{x^k},$$

also kann im Intervall $N \leqq x \leqq N' < 2N$

$$r_k = \frac{(k-1)!}{2^{k+1}\pi}\frac{t}{N^k},$$

$$R_k = \frac{(k-1)!}{2\pi}\frac{t}{N^k}$$

und $A = N$ genommen werden. Bei dieser Wahl von r_k, R_k und A sind auch die für $k \geqq 3$ notwendigen Voraussetzungen (30) und (31) erfüllt; denn es ist wegen (42)

$$A^3 R_k r_k = \frac{[(k-1)!]^2}{2^{k+2}\pi^2}\frac{t^2}{N^{2k-3}} > \frac{[(k-1)!]^2}{2^{k+2}\pi^2} \geqq \frac{1}{8\pi^2}$$

und

$$A^2 R_k^2 r_k^{-1} = \frac{(k-1)!}{\pi} 2^{k-1}\frac{t}{N^{k-2}} > \frac{(k-1)!}{\pi} 2^{k-1} t^{\frac{1}{2k-3}} > \frac{8}{\pi} > 1.$$

Wir dürfen also Hilfssatz 8 anwenden und erhalten für $k \geqq 3$ die Abschätzung

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} n^{-s}\right| < 11{,}554\, N^{1-\sigma}\left(\frac{R_k}{r_k}\right)^{\frac{1}{x-2}} R_k^{\frac{1}{x-2}}$$

$$= 11{,}554 \sqrt[x-2]{\frac{(k-1)!\,2^k}{2\pi}}\, N^{1-\sigma-\frac{k}{x-2}} t^{\frac{1}{x-2}}.$$

Nun ist für $k \geqq 4$ $\qquad 4k\pi < 2^k (k-1)!,$

$$\frac{k!\,2^k}{\pi} < \frac{[(k-1)!]^2\, 2^{2k-2}}{\pi^2} < \left\{\frac{(k-1)!\,2^{k-1}}{\pi}\right\}^{2+\frac{2}{x-2}},$$

also $$d_k = \sqrt[x-2]{\frac{(k-1)!\,2^{k-1}}{\pi}} > \sqrt[2x-2]{\frac{k!\,2^k}{\pi}} = d_{k+1}.$$

Da außerdem $\qquad d_3 < 1{,}169 \quad$ und $\quad d_4 < 1{,}216$

ist, so ergibt sich, wenn wir noch

$$N = t^\alpha$$

setzen,

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} n^{-s}\right| < 14{,}050\, t^{\frac{1}{x-2}+\left(1-\sigma-\frac{k}{x-2}\right)\alpha}. \tag{43}$$

Diese für $k \geqq 3$ und

$$\alpha \leqq \alpha_k = \frac{1}{k - \frac{3}{2}} \qquad (k \geqq 3) \tag{44}$$

gültige Abschätzung ist, allerdings mit der Konstante 15,328, auch noch für $k = 2$ und

$$\alpha \leqq \alpha_2 = 1 \tag{45}$$

richtig. Aus (29) folgt nämlich durch partielle Summation wegen $N < t$

$$\left\{\begin{aligned} \left|\sum_{n=N}^{N'} n^{-s}\right| &< 2{,}637\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, N^{-\sigma} t^{\frac{1}{2}} + 5{,}274\sqrt{8\pi}\, N^{1-\sigma} t^{-\frac{1}{2}} \\ &< 2{,}637\,(1+2\pi)\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, N^{-\sigma} t^{\frac{1}{2}} < 2{,}637 \cdot 7{,}284 \cdot 0{,}798\, N^{-\sigma} t^{\frac{1}{2}} \\ &< 15{,}328\, t^{\frac{1}{2} - \alpha\sigma}. \end{aligned}\right. \tag{46}$$

Das Intervall $\langle 0{,}1\rangle$, in dem α variiert, unterteilen wir durch die Zahlen $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$. Die Formel (44) (oder (46)) werde bei jedem k nur im Intervall $(\alpha_{k+1}, \alpha_k\rangle$ angewandt. Der Exponent

$$\frac{1}{\varkappa - 2} + \left(1 - \sigma - \frac{k}{\varkappa - 2}\right)\alpha \tag{47}$$

stellt in Abhängigkeit von α eine Gerade dar. Da die Zahlen $\frac{k}{\varkappa - 2}$ monoton abnehmen, gibt es zu jedem $\sigma \geqq 0$ ein k_σ mit

$$\frac{k_\sigma + 1}{2\varkappa_\sigma - 2} < 1 - \sigma \leqq \frac{k_\sigma}{\varkappa_\sigma - 2}. \tag{48}$$

Unsere Gerade steigt oder fällt, je nachdem $k > k_\sigma$ oder $k \leqq k_\sigma$ ist. Nennen wir also β_k das Maximum von (47) im Intervall $(\alpha_{k+1}, \alpha_k\rangle$, so wird

$$\beta_k = \begin{cases} \dfrac{1 - \sigma - \frac{\frac{1}{2}}{\varkappa - 2}}{k - \frac{1}{2}} & \text{für} \quad k \leqq k_\sigma, \\[2ex] \dfrac{1 - \sigma - \frac{\frac{3}{2}}{\varkappa - 2}}{k - \frac{3}{2}} & \text{für} \quad k > k_\sigma. \end{cases} \tag{49}$$

Nach (48) ist nun

$$1 - \sigma > \frac{3}{2^{k_\sigma + 1}} > \frac{2\sqrt{2}}{2^{k_\sigma + 1}} = \frac{1}{2^{k_\sigma - \frac{1}{2}}},$$

$$k_\sigma - \frac{1}{2} > \frac{\log \frac{1}{1 - \sigma}}{\log 2},$$

also wird für $k > k_\sigma$

$$\beta_k < \frac{1 - \sigma}{k - \frac{3}{2}} \leqq \frac{1 - \sigma}{k_\sigma - \frac{1}{2}} < \log 2 \, \frac{1 - \sigma}{\log \frac{1}{1 - \sigma}}. \tag{50}$$

Wir wollen jetzt bei gegebenem σ

$$\operatorname{Max} \gamma_k = \operatorname{Max} \frac{1-\sigma-\frac{1}{2}\,\varkappa-2}{k-\frac{1}{2}}$$

nach oben abschätzen. Zunächst stellt man fest, daß

$$\gamma_k \gtrless \gamma_{k+1}$$

ist, je nachdem $\quad 1-\sigma \gtrless \dfrac{\varkappa(k+\frac{3}{2})-2}{4(\varkappa-1)(\varkappa-2)} = \delta_k$

ist. Da die Zahlen δ_k monoton abnehmen, gibt es ein k_σ' mit

$$\frac{2\varkappa_\sigma'(k_\sigma'+\frac{5}{2})-2}{4(2\varkappa_\sigma'-1)(2\varkappa_\sigma'-2)} < 1-\sigma \leqq \frac{\varkappa_\sigma'(k_\sigma'+\frac{3}{2})-2}{4(\varkappa_\sigma'-1)(\varkappa_\sigma'-2)}. \tag{51}$$

(Es ist übrigens $k_\sigma' \leqq k_\sigma$.) Bei dieser Bedeutung von k_σ' ist

$$\operatorname{Max} \gamma_k = \gamma_{k_\sigma'+1}.$$

Nun ist für $k \geqq 4$

$$\frac{2\varkappa\left(k+\frac{5}{2}\right)-2}{4(2\varkappa-1)(2\varkappa-2)} > \frac{2k+5-\frac{2}{\varkappa}}{16\varkappa} \geqq \frac{12{,}875}{16\varkappa} > \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}}.$$

Man prüft leicht nach, daß diese Relation auch für $k=2$ und $k=3$ besteht. Es folgt somit aus (51)

$$1-\sigma > \frac{1}{2^{k_\sigma'+\frac{1}{2}}},$$

$$k_\sigma' + \frac{1}{2} > \frac{\log\frac{1}{1-\sigma}}{\log 2},$$

also $$\operatorname{Max} \gamma_k = \gamma_{k_\sigma'+1} < \frac{1-\sigma}{k_\sigma'+\frac{1}{2}} < \log 2 \frac{1-\sigma}{\log\frac{1}{1-\sigma}}.$$

Für jede unserer Summen gilt daher

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} n^{-s}\right| < 15{,}328\, t^{\log 2 \frac{1-\sigma}{\log\frac{1}{1-\sigma}}},$$

also folgt aus (37), (40) und (41)

$$|\zeta(s)| < 1{,}443 \cdot 15{,}328\, t^{\log 2 \frac{1-\sigma}{\log\frac{1}{1-\sigma}}} \log t + 1{,}340 < 22{,}41\, t^{\log 2 \frac{1-\sigma}{\log\frac{1}{1-\sigma}}} \log t$$

wegen $\quad 1{,}340 \leqq 1{,}340 \dfrac{\log t}{\log 100} < \dfrac{1{,}340}{4{,}605} \log t < 0{,}291 \log t.$

Hilfssatz 11: *Für* $\sigma \geqq 1$, $t \geqq 50$ *ist*

$$|\zeta(s)| < \log t - 0{,}048.$$

Beweis: Siehe R. J. Backlund, Acta Math. 41 (1918), S. 362.

§ 6. Ein Hilfssatz über analytische Funktionen und seine Anwendung auf $\zeta(s)$.

Hilfssatz 12: *$f(z)$ sei regulär für $|z| \leqq r$, $f(0) \neq 0$. Dann ist, wenn α alle Nullstellen von $f(z)$ in $|z| < r$ durchläuft,*

$$(52) \quad -\Re\frac{f'(0)}{f(0)} = -\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})| \cos\varphi \, d\varphi + \sum_\alpha \left(\frac{1}{|\alpha|^2} - \frac{1}{r^2}\right) \Re\alpha .$$

Ist außerdem $f(z) \neq 0$ für $\Re z > 0$, so gilt

$$(53) \quad \begin{cases} -\Re\dfrac{f'(0)}{f(0)} \leqq \dfrac{1}{\pi r}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} {}^{+}\log|f(re^{i\varphi})| \, |\cos\varphi| \, d\varphi \\ \qquad + \dfrac{1}{\pi r}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} {}^{+}\log\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}\cos\varphi \, d\varphi . \end{cases}$$

Ist jetzt noch $f(-\alpha) = 0$, $\alpha > 0$ reell, so gilt

$$(54) \quad \begin{cases} -\Re\dfrac{f'(0)}{f(0)} \leqq \dfrac{1}{\pi r}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} {}^{+}\log|f(re^{i\varphi})| \, |\cos\varphi| \, d\varphi \\ \qquad + \dfrac{1}{\pi r}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} {}^{+}\log\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}\cos\varphi \, d\varphi + \frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha} . \end{cases}$$

Beweis: Wir ziehen zunächst mittels der GREENschen Funktion die Nullstellen ab:

$$(55) \qquad g(z) = f(z) \prod_\alpha \frac{r^2 - \bar{\alpha} z}{r(z-\alpha)} .$$

Dann läßt sich $\log g(z)$ eindeutig in $|z| \leqq r$ definieren. Aus der bekannten POISSONschen Formel

$$(56) \qquad \log g(\zeta) = i \arg g(0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \log|g(z)| \, \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\frac{dz}{z}$$

folgt durch Differentiation, wenn wir noch $\zeta = 0$ setzen,

$$\frac{g'(0)}{g(0)} = \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\varphi})|\, e^{-i\varphi}\, d\varphi.$$

Beachten wir, daß auf dem Rande des Kreises $|f(z)| = |g(z)|$ ist, so wird

$$\Re\frac{g'(0)}{g(0)} = \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\cos\varphi\, d\varphi. \tag{57}$$

Nun ist aber nach (55)

$$\frac{g'(0)}{g(0)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_\alpha\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\bar\alpha}{r^2}\right),$$

also

$$\Re\frac{g'(0)}{g(0)} = \Re\frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_\alpha\left(\frac{1}{|\alpha|^2} - \frac{1}{r^2}\right)\Re\alpha,$$

woraus zusammen mit (57) die Formel (52) folgt. Daraus erhält man (53), wenn man bedenkt, daß jetzt für jedes α

$$\left(\frac{1}{|\alpha|^2} - \frac{1}{r^2}\right)\Re\alpha \leqq 0$$

ist. Für $\alpha = -\varrho$ lassen wir aber das entsprechende Glied

$$\left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r^2}\right)(-\varrho) \leqq \frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}$$

in der Rechnung.

Hilfssatz 13: *Es sei* $t \geqq 101$, $\zeta(\beta+it)=0$, $\sigma_1 = 1+\varepsilon$, $0<\varepsilon<r\leqq\frac{3}{4}$, $\varepsilon < \frac{1}{200}$, $m = 1, 2, 3, 4$, $s_m = \sigma_1 + imt$. *Dann ist*

$$\left\{\begin{aligned} -\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(s_1) &< \frac{\log 2}{2}\frac{\log t}{\log\frac{1}{r}} \\ &\quad + \frac{2}{\pi r}\left(4{,}193 + \varepsilon + \log\frac{1}{\varepsilon} + \log\log t\right) - \frac{1}{1+\varepsilon-\beta} \end{aligned}\right. \tag{58}$$

und für $m = 2, 3, 4$

$$\left\{\begin{aligned} -\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(s_m) &< \frac{\log 2}{2}\frac{\log t}{\log\frac{1}{r}} \\ &\quad + \frac{2}{\pi r}\left(2{,}622 + \varepsilon + \log\frac{1}{\varepsilon} + \log\log mt\right) + \frac{\log 2\log m}{2\log\frac{1}{r}}. \end{aligned}\right. \tag{59}$$

Beweis: Wir setzen

$$z = s - s_m, \quad -\alpha = \beta + it - s_1, \quad f(z) = f(s - s_m) = \zeta(s)$$

und wenden Hilfssatz 12 an. Betrachten wir insbesondere (52), so sehen wir aus Hilfssatz 11 und Satz 2, daß das erste in (53) auftretende Integral nicht verkleinert wird, wenn wir uns den Integrationsweg zur Abschätzung der Integrale um ε parallel nach links verschoben denken. Wir erhalten so

$$-\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(s_m) \leqq \frac{1}{\pi r}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \log|\zeta(s_m + re^{i\varphi})|\,|\cos\varphi|\,d\varphi$$

$$+\frac{1}{\pi r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1}{|\zeta(s_m + re^{i\varphi})|}\cos\varphi\,d\varphi.$$

$$\leqq \frac{1}{\pi r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log\left\{22{,}41\,(tm - r\sin\varphi)^{\log 2 - \frac{r\cos\varphi}{\log\frac{1}{r\cos\varphi}}}\log(tm - r\sin\varphi)\right\}\cos\varphi\,d\varphi$$

$$+\frac{2}{\pi r}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1+\frac{1}{\varepsilon}}{\zeta(2{,}01)}\cos\varphi\,d\varphi.$$

Dabei haben wir noch von der Relation

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^{\sigma}} = \frac{\zeta(\sigma)}{\zeta(2\sigma)}$$

und von (10) Gebrauch gemacht. Zerlegen wir jetzt das erste Integral in zwei andere mit den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$, 0 und 0, $\frac{\pi}{2}$ und führen wir im ersten dieser Integrale $-\varphi$ als neue Variable ein, so erhalten wir wegen

$$\log(tm + r\sin\varphi)\log(tm - r\sin\varphi)$$

$$= \left(\log tm + \log\left(1 + \frac{r\sin\varphi}{tm}\right)\right)\left(\log tm - \log\left(1 - \frac{r\sin\varphi}{tm}\right)\right)$$

$$< \left(\log tm + \frac{r\sin\varphi}{tm}\right)\left(\log tm - \frac{r\sin\varphi}{tm}\right) < \log^2 tm$$

durch Addition der Integranden

$$-\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(s_m) \leqq \frac{2}{\pi r}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left\{22{,}41\,(tm)^{\frac{\log 2\frac{r\cos\varphi}{1}}{\log\frac{1}{r\cos\varphi}}}\log tm\right\}\cos\varphi\,d\varphi$$

$$+\frac{2}{\pi r}\log\frac{1+\frac{1}{\varepsilon}}{\zeta(2{,}01)}$$

$$\leqq \frac{2}{\pi r}\log\{22{,}41\log tm\} - \frac{2}{\pi r}\log\zeta(2{,}01) + \frac{2}{\pi r}\log\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2\varepsilon}{\pi r}$$

$$+\frac{2}{\pi r}\frac{\log 2\log tm}{\log\frac{1}{r}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$< \frac{2}{\pi r}\left(2{,}622+\varepsilon+\log\frac{1}{\varepsilon}+\log\log tm\right)+\frac{\log 2}{2}\frac{\log tm}{\log\frac{1}{r}},$$

weil nach (11)

$$\zeta(2{,}01) > \zeta(2) + 0{,}01\,\zeta'(2) > \frac{\pi^2}{6} - 0{,}01\cdot\frac{3}{2} > 1{,}629$$

ist. Damit ist (59) bewiesen. (58) ergibt sich analog aus (54).

§ 7. Ausdehnung des nullstellenfreien Gebietes im kritischen Streifen.

Satz 3: *Im Streifen*

$$(60)\qquad 1-\frac{1}{12{,}156\log t\left(1+20\,\frac{\log\log\log t}{\log\log t}\right)} \leqq \sigma \leqq 1,\ t\geqq 200$$

liegen keine Nullstellen von $\zeta(s)$.

Beweis: Nach Satz 1 ist für $t\geqq 200$ für jede Nullstelle $\varrho=\beta+i\gamma$ von $\zeta(s)$

$$\beta < 1-\frac{1}{17{,}537\log\gamma}.$$

Zeigen wir also, daß für $200\leqq\gamma\leqq e^{(e^5,1)}$

$$(61)\qquad \frac{\log\log\gamma}{12{,}156\left(1+20\,\frac{\log\log\log\gamma}{\log\log\gamma}\right)} < \frac{1}{17{,}537}$$

ist, so haben wir unseren Satz für diesen Bereich von γ bewiesen.

Wir betrachten dazu die Funktion

$$f(x) = 0{,}693 + 13{,}863\,\frac{\log x}{x} - x.$$

Es ist $$f(1) < 0, \quad f(e) > 0, \quad f(\infty) < 0.$$

Aus dem Umstand, daß es nur ein positives x gibt, für das $f'(x)$ verschwindet, folgt, daß $f(x)$ in jedem der Intervalle $(1, e)$, (e, ∞) höchstens eine Nullstelle haben kann. Nun ist aber $f(1{,}1) > 0$ und $f(5{,}1) > 0$; wir haben also gezeigt, daß für $1{,}1 \leqq x \leqq 5{,}1$

$$x < 0{,}693 + 13{,}863\,\frac{\log x}{x} < \frac{12{,}156}{17{,}537} + \frac{243{,}12}{17{,}537}\,\frac{\log x}{x}$$

oder $$17{,}537\,x < 12{,}156\left(1 + 20\,\frac{\log x}{x}\right)$$

ist. Damit ist (61) im gewünschten Umfang bewiesen.

Wir betrachten jetzt nur noch den Fall

(62) $$5{,}1 < \log\log\gamma.$$

Für jedes $\sigma_1 > 1$ ist nach (18)

$$0 \leqq -47\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_1) - 80\,\Re\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_1 + i\gamma) - 49\,\Re\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_1 + 2i\gamma)$$
$$- 20\,\Re\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_1 + 3i\gamma) - 4\,\Re\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_1 + 4i\gamma).$$

Benutzen wir (12) und Hilfssatz 13, so folgt daraus

$$0 \leqq \frac{47}{\varepsilon} + \frac{47\,\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{80}{1+\varepsilon-\beta} + 76{,}5\log 2\,\frac{\log\gamma}{\log\frac{1}{\gamma}}$$
$$+ \frac{2}{\pi\gamma}(80\cdot 4{,}193 + 73\cdot 2{,}622) + \frac{306}{\pi\gamma}\left(\varepsilon + \log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$
$$+ \frac{2}{\pi\gamma}(80\log\log\gamma + 49\log\log 2\gamma + 20\log\log 3\gamma + 4\log\log 4\gamma)$$
$$+ \frac{\log 2}{2\log\frac{1}{\gamma}}(49\log 2 + 20\log 3 + 4\log 4)$$

oder

$$\frac{80}{1+\varepsilon-\beta} < \frac{47}{\varepsilon} + \frac{47\,\varepsilon}{1+\varepsilon} + 53{,}026\,\frac{\log\gamma}{\log\frac{1}{\gamma}} + \frac{1053{,}692}{\pi\gamma} + \frac{306}{\pi\gamma}\left(\varepsilon + \log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$
$$+ \frac{97{,}450}{\gamma}\log\log\gamma + \frac{21{,}309}{\log\frac{1}{\gamma}},$$

weil für (62)

$$80 \log\log\gamma + 49 \log\log 2\gamma + 20 \log\log 3\gamma + 4 \log\log 4\gamma$$
$$< 153 \log\log\gamma + \frac{49\log 2 + 20\log 3 + 4\log 4}{\log\gamma}$$
$$< \left(153 + \frac{61{,}482}{\log\gamma \log\log\gamma}\right)\log\log\gamma < \left(153 + \frac{61{,}482}{5{,}1 \cdot 164{,}02}\right)\log\log\gamma$$
$$< 153{,}074 \log\log\gamma$$

ist. Anders geschrieben wird die erhaltene Ungleichung

$$\beta < 1 - \left(\frac{80}{47E + A} - \frac{1}{E}\right), \tag{63}$$

wobei

$$E = \frac{1}{\varepsilon}, \quad R = \frac{1}{\gamma} \tag{64}$$

und

$$\begin{cases} A = \frac{47}{E+1} + \frac{53{,}026 \log\gamma + 21{,}309}{\log R} \\ \quad + \left(335{,}401 + 97{,}403 \log E + \frac{97{,}403}{E} + 97{,}450 \log\log\gamma\right) R \end{cases} \tag{65}$$

gesetzt ist. Diese Formeln gelten allerdings nur unter den Bedingungen

$$E > 200, \quad R \geqq \frac{4}{3}. \tag{66}$$

Wir betrachten zunächst nur die γ-Werte mit

$$5{,}1 \leqq \log\log\gamma \leqq 9. \tag{67}$$

In diesem Bereich setzen wir

$$R = \frac{3\log\gamma}{(\log\log\gamma)^3} \tag{68}$$

und

$$E = \frac{53{,}026}{\sqrt{80 \cdot 47} - 47} \frac{\log\gamma}{\log\log\gamma}\left(1 + 20\,\frac{\log\log\log\gamma}{\log\log\gamma}\right) = \frac{A_1}{\sqrt{47}\,(\sqrt{80} - \sqrt{47})}. \tag{69}$$

Die Bedingungen (66) sind dann erfüllt. Genauer ist

$$E > \frac{164}{14{,}4}\,\frac{53{,}0}{5{,}1}\left(1 + \frac{20 \cdot 1{,}62}{5{,}1}\right) > 852$$

und

$$E < \frac{\log\gamma}{14{,}31}\,\frac{53{,}03}{5{,}1}\left(1 + \frac{20 \cdot 1{,}63}{5{,}1}\right) < 5{,}374 \log\gamma,$$

also

$$\log E < \log\log\gamma + 1{,}682.$$

Es wird daher

$$\frac{47}{E+1} + \left(335{,}401 + 97{,}403 \log E + \frac{97{,}403}{E} + 97{,}450 \log\log\gamma\right) \frac{3\log\gamma}{(\log\log\gamma)^3}$$
$$< 0{,}056 + 3\left(194{,}9 + \frac{499{,}5}{\log\log\gamma}\right) \frac{\log\gamma}{(\log\log\gamma)^3} < 539{,}5 \frac{\log\gamma \log\log\log\gamma}{(\log\log\gamma)^2}.$$

Es ist ferner

$$(70) \quad \begin{cases} \dfrac{53{,}026\log\gamma + 21{,}309}{\log\log\gamma + \log 3 - 3\log\log\log\gamma} - 53{,}026 \dfrac{\log\gamma}{\log\log\gamma} \\ \qquad = \dfrac{\log\gamma \log\log\log\gamma}{(\log\log\gamma)^2} \dfrac{159{,}078 + \dfrac{21{,}309\log\log\gamma}{\log\gamma\log\log\log\gamma} - \dfrac{53{,}026\log 3}{\log\log\log\gamma}}{1 - \dfrac{3\log\log\log\gamma - \log 3}{\log\log\gamma}}, \end{cases}$$

und hierin ist der Faktor rechts unter der Bedingung (67)

$$< \frac{159{,}1 + \dfrac{21{,}31 \cdot 5{,}1}{164{,}0 \cdot 1{,}629} - \dfrac{58{,}25}{2{,}198}}{1 - \dfrac{3 \cdot 1{,}6293 - 1{,}0986}{5{,}1}} < \frac{159{,}1 + 0{,}5 - 26{,}5}{0{,}257} < 517{,}9.$$

Zusammenfassung unserer Ergebnisse liefert jetzt

$$A < 53{,}026 \frac{\log\gamma}{\log\log\gamma} + 1057{,}4 \frac{\log\gamma \log\log\log\gamma}{(\log\log\gamma)^2} = A_1.$$

Setzen wir das in (64) ein, so ergibt sich

$$\beta < 1 - \frac{80 + 47 - 2\sqrt{80 \cdot 47}}{A_1} < 1 - \frac{4{,}3623}{A_1}.$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von A_1 folgt hieraus aber (60).

Wir haben unsere Behauptung also nur noch für

$$(71) \qquad 9 \leqq \log\log\gamma$$

zu beweisen und setzen dazu

$$(72) \qquad R = \frac{2\log\gamma}{(\log\log\gamma)^3}.$$

E sei wieder durch (69) bestimmt. Die Bedingungen (66) sind dann erfüllt. Für E ergibt sich

$$E > \frac{8100}{15} \cdot \frac{53}{9}\left(1 + \frac{20 \cdot 2{,}1}{9}\right) > 17800$$

und

$$E < \frac{\log\gamma}{14} \frac{54}{9}\left(1 + \frac{20 \cdot 2{,}2}{9}\right) < 2{,}6 \log\gamma,$$

also

$$\log E < \log\log\gamma + 1.$$

Es wird daher

$$\frac{47}{E+1} + \left(335{,}401 + 97{,}403 \log E + \frac{97{,}403}{E} + 97{,}450 \log\log\gamma\right) \frac{2\log\gamma}{(\log\log\gamma)^3}$$
$$< 0{,}01 + \left(195 + \frac{434}{\log\log\gamma}\right) \frac{2\log\gamma}{(\log\log\gamma)^2} < \frac{489}{2{,}1} \frac{\log\gamma \log\log\log\gamma}{(\log\log\gamma)^2}$$
$$< 233 \frac{\log\gamma \log\log\log\gamma}{(\log\log\gamma)^2}.$$

In der zu (70) analogen Zerlegung ist der Faktor rechts jetzt

$$\frac{159{,}078 + \frac{21{,}309 \log\log\gamma}{\log\gamma \log\log\log\gamma} - \frac{53{,}026 \log 2}{\log\log\log\gamma}}{1 - \frac{3\log\log\log\gamma - \log 2}{\log\log\gamma}} < \frac{160 + \frac{22 \cdot 9}{8110 \cdot 2{,}1}}{1 - \frac{3 \cdot 2{,}2}{9}} < \frac{161}{0{,}26} < 620.$$

Ebenso wie vorhin wird also

$$A < 53{,}026 \frac{\log\gamma}{\log\log\gamma} + 853 \frac{\log\gamma \log\log\log\gamma}{(\log\log\gamma)^2} < A_1.$$

Die weitere Rechnung verläuft genau wie oben. Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

Lebenslauf.

Ich, Heinz Westphal, wurde am 18. Dezember 1912 als Sohn des Bankbeamten Hugo Westphal zu Berlin-Schöneberg geboren. Von Ostern 1919 an besuchte ich das Reformrealgymnasium zu Berlin-Steglitz, an dem ich Ostern 1931 die Reifeprüfung ablegte. Darauf studierte ich bis Herbst 1935 an der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin Mathematik und Physik. Allen meinen Lehrern, besonders aber den Herren Professoren I. SCHUR und E. SCHMIDT, möchte ich nicht verfehlen, auch an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen.